Fragen zu Optik

Verständnisfragen

1. Was bezeichnen die Begriffe Parallelstrahl, Mittelpunktstrahl und Brennpunktstrahl in einem Linsensystem?

   Lösung: Ein Parallelstrahl bezeichnet einen Lichtstrahl, der parallel zur Optischen Achse verläuft, ein Mittelpunktstrahl einen Strahl, der durch den Linsenmittelpunkt verläuft und eine Brennpunktstrahl einen Strahl, der durch den Brennpunkt der Linse verläuft.

2. Unter welchen Bedingungen wirken konvexe Linsen als Sammellinse und konkave Linsen als Streulinsen? Warum?

   Lösung: Damit konvexe Linsen als Sammellinsen und konkave Linsen als Streulinsen wirken muss der Brechungsindex der Linse höher als der des Mediums auf beiden Seiten der Linse sein (z.B. bei Luft). Die Linse ist ein dichteres Medium als Luft, nach dem Gesetz von Snellius werden die Lichtstrahlen also beim Eintritt in die Linse zum Lot hin gebrochen, beim Austritt vom Lot weg. Stellt man ein Lot auf die konvexe bzw. konkave Oberfläche der Linsen, so erkennt man schnell, dass bei konvexen Linsen die Strahlen zweimal zur Mittelachse der Linse hin gebrochen, also gesammelt, werden, bei konkaven Linsen dagegen zweimal von der Mittelachse weg.

3. In welchem Medium bewegen sich Lichtwellen fort?

   Lösung: Lichtwellen benötigen kein materielles Medium zur Fortbewegung. Es handelt sich um Wellen im elektromagnetischen Feld.

4. Licht hat sowohl einen Wellen- als auch einen Teilchencharakter. Welches Analogon haben die Frequenz und Amplitude der Lichtwelle im Teilchenmodell?

   Lösung: Die Frequenz der Lichtwelle bestimmt die Energie der Lichtquanten, der Photonen. Die Amplitude der Welle entspricht der Lichtintensität, also der Anzahl an Lichtquanten, die pro Zeiteinheit und pro Fläche auftreffen.

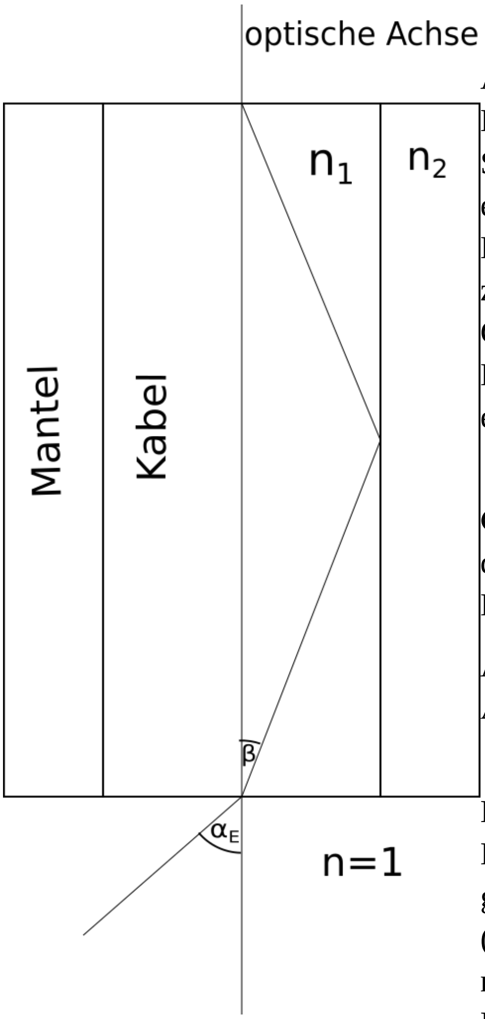
5. Welche Wirkung haben Lochblenden auf die von einem Bild ausgehenden Lichtstrahlen?

   Lösung: Lochblenden invertieren das Bild, da divergierende Lichtstrahlen ausgeblendet werden und lediglich die Lichtstrahlen, die auf die Blende gerichtet sind, diese passieren.

6. Warum teilt ein Prisma weißes Licht in Licht unterschiedlicher Farben auf?

   Lösung: Licht unterschiedlicher Frequenzen bewegt sich in verschiedenen Materialien unterschiedlich schnell fort. Dies äußert sich darin, dass die Brechungsintizes der verschiedenen Frequenzen nicht übereinstimmen, Licht verschiedener Frequenzen wird in Materie also unterschiedlich stark gebrochen. Da weißes Licht eine Überlagerung sehr vieler verschiedener Frequenzen ist und diese verschieden Stark gebrochen werden befinden sich die Austrittspunkte der Lichtstrahlen verschiedener Frequenzen also an unterschiedlichen Orten auf der Prismenoberfläche. Das Licht wurde in seine Frequenzen aufgeteilt.

Rechenaufgaben



7. Glasfaserkabel haben heute vielfältige Anwendungsgebiete, vor allem in der Informations- und Bildübertragung. Sie bestehen aus einem Kern aus Siliziumdioxid (SiO_2), auch Quarzglas genannt, umhüllt von einem Mantel aus mit Fluor oder Bor dotiertem Quarzglas. Die für Menschen sichtbaren Wellenlängen liegen etwa zwischen 380nm und 780nm. Soll dieses sichtbare Licht im Glasfaserkabel geleitet werde muss es an den Rändern des Kabels totalreflektiert werden. Dies geschieht nur innerhalb eines gewissen Einfallswinkels.

   a) Bestimmen Sie aus dem Gesetz von Snellius die Gleichung für die benötigte Größe des Einfallswinkels α_E ab dem eine Totalreflektion stattfindet in Abhängigkeit vom Brechungsindex des Kerns und des Mantels.

   Anmerkung: Eine Totalreflektion besteht, wenn der Ausfallswinkel β 90° übersteigt.

   b) Reines Quarzglas hat für 380nm einen Brechungsindex von 1,472, für 780nm beträgt er 1,454. Der Brechungsindex des Mantels liegt um jeweils etwa 0,003 geringer. Nehmen Sie an, Licht fällt durch das Medium Luft (n=1) auf ein offenes Ende des Glasfaserkabels. Was ist der maximale Einfallswinkel, aus dem das Licht noch durch das Kabel geleitet werden kann?

Lösung:

a) Das Gesetz von Snellius besagt $\frac{sin(\alpha_E)}{sin(\beta)} = \frac{n_2}{n_1}$. Soll β nun 90° betragen, so gilt $\frac{sin(\alpha_E)}{sin(90°)} = \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow sin(\alpha_E) = \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow \alpha_E = arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$.

b) Innerhalb des Glasfaserkabels beträgt der Totalreflektionswinkel für 380nm $\alpha_E = arcsin\left(\frac{1{,}469}{1{,}472}\right) \approx 86{,}34°$ und für 780nm $\alpha_E = arcsin\left(\frac{1{,}451}{1{,}454}\right) \approx 86{,}32°$. Beim Einfall in das Glasfaserkabel aus der Luft darf der Brechungswinkel, also der Winkel des Lichts nach Eintritt in das Kabel zur Mittelachse des Kabels nicht mehr als $90° - 86{,}34° = 3{,}66°$ für Licht der Wellenlänge 380nm bzw. $90° - 86{,}32° = 3{,}68°$ betragen. Der Grenzeinfallswinkel darf dann also $\alpha_E = arcsin\left(\frac{1{,}472}{1} \cdot sin(3{,}66°)\right) \approx 5{,}39°$ bei 380nm und $\alpha_E = arcsin\left(\frac{1{,}454}{1} \cdot sin(3{,}68°)\right) \approx 5{,}35°$ bei 780nm betragen. Lichtstrahlen mit größerem Einfallswinkel können nicht mehr geleitet werden.

8. Sie arbeiten mit einem Lichtmikroskop. Dieses besitzt ein Okular mit 10-facher Vergrößerung und vier verschiedene Objektive mit 4-facher, 10-facher, 40-facher und 100-facher Vergrößerung. Das Objektiv mit 100-facher Vergrößerung wird mit einer Öl-Immersion (n=1,518) betrieben, alle anderen ohne Immersion. Die Objektive haben

entsprechend eine Numerische Apertur von 0,1, 0,25, 0,65 und 1,25. Der Tubus hat eine Länge von t=160mm. Die Vergrößerung des Okulars kann mit derselben Gleichung wie für die Lupe bestimmt werden, die Vergrößerung des Objektivs wird über $V = \frac{t}{f_{obj}}$ bestimmt.

a) Bestimmen Sie die Gesamtvergrößerung des Mikroskops mit den verschiedenen Objektiven.

b) Berechnen Sie die Brennweite des Okulars und der Objektive.

c) Berechnen Sie den Öffnungswinkel der verschiedenen Objektive. Nehmen Sie an, sie würden das Objektiv mit 100-facher Vergrößerung ohne Immersionsöl betreiben. Wie groß wäre die Numerische Apertur dieses Objektivs dann?

d) Bestimmen Sie die relative Dielektrizitätskonstante des Immersionsöls und die daraus resultierende Lichtgeschwindigkeit in dem Öl.

e) Sie benutzen Licht der Wellenlänge 546,1nm. Bestimmen Sie die Auflösung der einzelnen Objektive. Bestimmen Sie für das Objektiv mit 100-facher Vergrößerung auch die Auflösung ohne Immersionsöl.

Lösung:

a) Zur Bestimmung der Gesamtvergrößerung müssen nur die Einzelvergrößerungen der verschiedenen Linsen miteinander multipliziert werden, wie man auch an der Vergrößerungsgleichung für das Mikroskop $V_M = \frac{t \cdot s_0}{f_{obj} \cdot f_{ok}} = \frac{t}{f_{obj}} \cdot \frac{s_0}{f_{ok}} = V_{obj} \cdot V_{ok}$. Man erhält so eine Vergrößerung von respektive 40, 100, 400 und 1000.

b) Für das Okular gilt $V_{ok} = \frac{s_0}{f_{ok}} \Leftrightarrow f_{ok} = \frac{s_0}{V_{ok}}$ und somit $f_{ok} = \frac{25cm}{10} = 2{,}5cm$. Die Brennweite der Objektive beträgt $V_{obj} = \frac{t}{f_{obj}} \Leftrightarrow f_{obj} = \frac{t}{V_{obj}}$. Man erhält Brennweiten von respektive 4cm, 1,6cm, 0,4cm und 0,16cm.

c) Der Öffnungswinkel berechnet sich aus der Numerische Apertur über $NA = n \cdot sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Leftrightarrow \varphi = 2 \cdot arcsin\left(\frac{NA}{n}\right)$. Der Brechungsindex für Luft beträgt näherungsweise 1. Für die drei ohne Immersion betriebenen Objektive erhält man so 11,48°, 28,96° und 81,08°. Für das Objektiv größter vergößerung beträgt der Öffnungswinkel 110,86°. Ohne Immersionsöl würde sich damit eine Numerische Apertur von $NA = sin\left(\frac{110{,}86°}{2}\right) \approx 0{,}82$ ergeben.

d) Es gilt $n = \sqrt{\epsilon_r} \Leftrightarrow \epsilon_r = n^2 \Rightarrow \epsilon_r \approx 2{,}304$. Man erhält eine Lichtgeschwindigkeit von $c = \frac{300000000\frac{m}{s}}{1{,}518} \approx 197628459\frac{m}{s}$.

e) Die Auflösungen der Objektive beträgt etwa 3,331µm, 1,332µm, 512,5nm und 266,5nm. Ohne Immersionsöl beträgt die Auflösung des letzten Mikroskops 406,2nm.

9. Das menschliche Auge ist ein extrem sensibles Organ, das das scharfe und kontrastreiche Sehen in einer großen Bandbreite von Entfernungen ermöglicht. Hauptverantwortlich für die Anpassung der Abbildung an die intendierte Sehweite ist die Linse, welche durch die Ziliarmuskeln in ihrer Form und damit optischen Eigenschaften verändert werden kann. Sie

übernimmt etwa 25% der Brechkraft des Auges, die restlichen 75% werden von der Augenhornhaut beigesteuert. In einem bestimmten Zustand hat die Linse eine Brechkraft von 23dpt. Die Brennweite in Luft beträgt dabei 4,35cm, die im Inneren des Augapfels 5,80cm.

a) Bestimmen Sie den Brechungsindex vom Glaskörper.

b) Wie groß ist die Bildweite, wenn ein Gegenstand sich in 40cm Abstand vor dem Auge befindet?

c) Ein Gegenstand der Höhe 5cm befindet sich in einem Abstand von 40cm vor dem Auge. Wie Hoch ist die Abbildung im Augeninneren?

d) Der Brechungsindex der Linse beträgt 1,414. Da sie ein Kugelkörper ist hat sie auf beiden Seiten denselben Radius. Bestimmen Sie diesen Radius.

e) Das Auge hat im entspannten Zustand insgesamt eine Brechkraft von etwa 59dpt. Schätzen Sie die Brechkraft des Glaskörpers ab und bestimmen Sie daraus seine Brennweite.

Lösung:

a) Die Brechkraft einer Linse ist eine konstante Größe. Es gilt also $D_{Linse} = \frac{n_{glas}}{f_{glas}} \Leftrightarrow n_{glas} = D_{Linse} \cdot f_{glas}$. Man erhält daraus einen Brechungsindex von $n_{glas} = 23dpt \cdot 0{,}058m = 1{,}334$ für den Glaskörper.

b) Wieder kann sich die Gleichung für die Brechkraft zunutze machen:

$$D = \frac{1}{g} + \frac{n}{b}$$
$$\Leftrightarrow D = \frac{b + ng}{gb}$$
$$\Leftrightarrow Dgb = b + ng$$
$$\Leftrightarrow Dg = 1 + \frac{ng}{b}$$
$$\Leftrightarrow \frac{Dg - 1}{n} = \frac{g}{b}$$

Man erhält $\frac{0{,}4m}{b} \approx 6{,}15 \Leftrightarrow b \approx 0{,}065m = 6{,}5cm$.

c) Da gilt, dass $\frac{G}{B} = \frac{g}{b}$ folgt $\frac{G}{B} = 6{,}15 \Leftrightarrow B = \frac{G}{6{,}15} \Rightarrow B \approx 0{,}81cm$.

d) Hier benötigt man die Linsenschleifergleichung: $D = \frac{n_{Linse}-n_1}{r_1} + \frac{n_2-n_{Linse}}{r_2}$, in diesem Spezialfall wandelt sie sich zu $D = \frac{n_{Linse}-n_1}{r} + \frac{n_2-n_{Linse}}{r} = \frac{n_2-n_1}{r} \Leftrightarrow r = \frac{n_2-n_1}{D}$. Als Radius ergibt sich somit $r = \frac{1{,}334-1}{23dpt} \approx 0{,}015m = 1{,}5cm$.

e) Wie oben erwähnt entfallen etwa 75% der Brechkraft auf den Glaskörper. Dies macht 44,25dpt. Für die Brennweite findet man $D = \frac{n}{f} \Leftrightarrow f = \frac{n}{D} \Rightarrow f \approx 0{,}03m = 3cm$.

10. Röntgendiagnostik ist ein weit verbreitetes bildgebendes Verfahren, bei welchem hochfrequente Strahlung durch den Körper geschickt und die Absorption abgebildet wird.

Das entstehende Bild bildet die dreidimensionale Struktur des Körpers auf eine zweidimensionale Fläche ab. Ausschlaggebend für die Abbildung, die meist in Graustufen erfolgt, ist der Absorptionskoeffizient. Dieser beträgt für Röntgenstrahlung der Energie 100keV in Knochen 0,1855cm^2/g, für Skelettmuskeln 0,1693cm^2/g und für Lungengewebe 0,1695cm^2/g. Der Absorptionskoeffizient wird wie hier häufig in Abhängigkeit von der Dichte der Materialien angegeben. Zur Bestimmung des absoluten Absorptionskoeffizienten muss der Wert noch mit der Materialdichte multipliziert werden. Diese beträgt für Knochen 1,92g/cm^3, für Skelettmuskeln 1,05g/cm^3 und für Lungengewebe 1,03g/cm^3. Sie möchten aufgrund von Verdacht auf Rippenbruch eine Thoraxröntgenuntersuchung durchführen. Wie hoch ist die relative Absorption (I/I_0) mit und ohne Rippenbruch? Nehmen Sie an, dass im Fall einer intakten Rippe der Röntgenstrahl zweimal eine Rippe von 2cm Dicke, zweimal eine Muskelschicht von 2cm Dicke und die Lunge mit einer Dicke von 12cm durchlaufen muss. Zur Berechnung der relativen Absorption muss beachtet werden, dass immer die bereits geschwächte Strahlung in die nächste Ebene eindringt. Vernachlässigen Sie die Absorption von Körperflüssigkeiten.

Lösung:

Das Lambert-Beer-Gesetz besagt, dass $I(\lambda) = I_0(\lambda) \cdot e^{-k(\lambda)\cdot d} \Leftrightarrow \frac{I(\lambda)}{I_0(\lambda)} = e^{-k(\lambda)\cdot d}$. Um k zu bestimmen müssen die oben genannten Absorptionskoeffizienten mit den Dichten multipliziert werden. Man erhält ~0,356 1/cm für Knochen, ~0,178 1/cm für Skelettmuskeln und ~0,176 1/cm für Lungengewebe. So erhält man

$$\frac{I}{I_0} = e^{-0{,}178\frac{1}{cm}\cdot 2cm} \cdot e^{-0{,}356\frac{1}{cm}\cdot 2cm} \cdot e^{-0{,}176\frac{1}{cm}\cdot 12cm} \cdot e^{-0{,}356\frac{1}{cm}\cdot 2cm} \cdot e^{-0{,}178\frac{1}{cm}\cdot 2cm}$$

$$\Leftrightarrow \frac{I}{I_0} = e^{-2\cdot 0{,}178\frac{1}{cm}\cdot 2cm} \cdot e^{-2\cdot 0{,}356\frac{1}{cm}\cdot 2cm} \cdot e^{-0{,}176\frac{1}{cm}\cdot 12cm}$$

$$\Leftrightarrow \frac{I}{I_0} = e^{-2\cdot 0{,}178\frac{1}{cm}\cdot 2cm - 2\cdot 0{,}356\frac{1}{cm}\cdot 2cm - 0{,}176\frac{1}{cm}\cdot 12cm} \approx 0{,}014$$

für einen intakten Knochen, da hier der Knochen zweimal durchlaufen werden muss. Nur etwa 1,4% der Intensität der ausgesandten Röntgenstrahlen erreichen also die Platte. Mit Rippenbruch beträgt diese Intensität dagegen

$$\frac{I}{I_0} = e^{-0{,}178\frac{1}{cm}\cdot 2cm} \cdot e^{-0{,}176\frac{1}{cm}\cdot 12cm} \cdot e^{-0{,}356\frac{1}{cm}\cdot 2cm} \cdot e^{-0{,}178\frac{1}{cm}\cdot 2cm}$$

$$\Leftrightarrow \frac{I}{I_0} = e^{-2\cdot 0{,}178\frac{1}{cm}\cdot 2cm} \cdot e^{-0{,}356\frac{1}{cm}\cdot 2cm} \cdot e^{-0{,}176\frac{1}{cm}\cdot 12cm}$$

$$\Leftrightarrow \frac{I}{I_0} = e^{-2\cdot 0{,}178\frac{1}{cm}\cdot 2cm - 0{,}356\frac{1}{cm}\cdot 2cm - 0{,}176\frac{1}{cm}\cdot 12cm} \approx 0{,}029$$

also noch etwa 2,9% der ursprünglichen Intensität, da der Knochen aufgrund des Bruchs am vorderen Rippenbogen nur einmal durchlaufen werden muss.

11. Sie senden Licht der Wellenlänge 496nm durch einen Spalt der Breite 0,004mm. Wie groß ist der Abstand der Maxima 1.Ordnung auf einem Schirm, der in 3m Entfernung von dem Spalt aufgestellt wird?

    Lösung:

Die Maxima 1. Ordnung befinden sich unter dem Winkel $sin(\theta) = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2d} \Leftrightarrow \theta = arcsin\left((2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2d}\right)$. Der Abstand dieser beiden Maximal voneinander beträgt nun aufgrund der Trigonometrie $2 \cdot tan(\theta) \cdot 3m$. Mit eingesetzten Zahlenwerten ergibt sich so ein Wert von etwa 2,4m.

12. Bei Licht der Wellenlänge 512nm messen Sie auf einem Schirm, der in 2,3m Entfernung aufgestellt ist einen Abstand der Minima 1.Ordnung voneinander von 1,58m. Welche Breite hat der Spalt?

Lösung:

Diese Aufgabe erfordert die Rechnung aus 11 rückwärts. Aus dem Abstand A folgt $1{,}58m = 2 \cdot tan(\theta) \cdot 2{,}3m \Leftrightarrow \theta = arctan\left(\frac{1{,}58m}{2 \cdot 2{,}3m}\right) \approx 18{,}96°$. Die Minima sind gegeben mit $sin(\theta) = \frac{k \cdot \lambda}{d} \Leftrightarrow d = \frac{k \cdot \lambda}{sin(\theta)}$ und man erhält so $d = \frac{512nm}{sin(18{,}96°)} \approx 1575{,}83nm \approx 0{,}002mm$.